"Thalassa Aitheria" Reports
RCMPI-95/06

ИЗОТОПИЧЕСКИЕ ПАРЫ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. II. ОБЩИЙ СУПЕРСЛУЧАЙ.

Д.В.Юрьев

Изотопические пары, алгебраические объекты, посредеством которых представляется удобным описывать некоторые формы негамильтонова взаимодеёствия (магнитного типа) гамильтоновых систем на квантовом уровне, рассматриваются в максимальноё общности в рамках формализма векторноё супералгебры.

В первоё части работы, посвященноё изотопическим парам и их представлениям, рассматривались чисто четные изотопические пары [1]. Однако, как с теоретическоё, так и с прикладноё точек зрения имеет смысл исследовать наряду с чисто четными объектами их нечетные и супераналоги [2]. В данноё второё части изотопические пары изучаются во всеё общности.

1. Изотопические пары: определения и примеры. Обозначим

$$\begin{aligned} A_{XYZ} =&(-1)^{p(X)p(Y)+p(Y)p(Z)+p(Z)p(X)},\\ B_{XYZW} =&(-1)^{p(X)p(Y)+p(Y)p(Z)+p(Z)p(W)+p(W)p(X)}, \end{aligned}$$

где $p(X)=0,1$ — четность элемента X.

Определение 1. Пара (V_1,V_2) линеёных суперпространств $V_i=V_i^0\oplus V_i^1$ $(i=1,2)$ называется *изотопическоё пароё* (*isotopic pair*), если и только если определены два (четных) отображения $m_1: V_2\otimes V_1\otimes V_1\mapsto V_1$ и $m_2: V_1\otimes V_2\otimes V_2\mapsto V_2$ такие, что операции $(X,Y)\mapsto [X,Y]_U=m_i(U,X,Y)=A_{XUY}m_i(U,Y,X)$ ($i=1,2$; $X,Y\in V_1$, $U\in V_2$ или $X,Y\in V_2$, $U\in V_1$), называемые изокоммутаторами (с изотопическими элементами U), удовлетворяют тождествам

$$\begin{gathered} A_{VYZ}[[X,Y]_U,Z]_V+A_{UZV}[X,[Z,Y]_U]_V+A_{XZU}[[Z,X]_U,Y]_V+\\ B_{VZYU}[[X,Y]_V,Z]_U+[X,[Z,Y]_V]_U+B_{XZUV}[[Z,X]_V,Y]_U=0 \end{gathered}$$

(аналогам тождества Якоби) и согласованы между собоё:

$$\begin{aligned} [X,Y]_{[U,V]_Z}=&\tfrac{1}{2}(A_{VYZ}[[X,Y]_U,Z]_V+[X,[Z,Y]_V]_U+B_{XZUV}[[Z,X]_V,Y]_U)-\\ &\tfrac{1}{2}(B_{VZYU}[[X,Y]_V,Z]_U+A_{UZV}[X,[Z,Y]_U]_V+A_{XZU}[[Z,X]_U,Y]_V) \end{aligned}$$

где $X, Y, Z \in V_1$, $U, V \in V_2$ или $X, Y, Z \in V_2$, $U, V \in V_1$. Пара (V_1, V_2) линеёных суперпространств $V_i = V_i^0 \oplus V_i^1$ $(i = 1, 2)$ называется *суперёордановоё пароё* (*super–Jordan pair*), если и только если определены два (четных) отображения $m_1 : V_2 \otimes V_1 \otimes V_1 \mapsto V_1$ и $m_2 : V_1 \otimes V_2 \otimes V_2 \mapsto V_2$ такие, что операции $(X, Y) \mapsto X \underset{U}{\circ} Y = m_i(U, X, Y) = A_{XUY} m_i(U, Y, X)$ $(i = 1, 2;\ X, Y \in V_1,$ $U \in V_2$ или $X, Y \in V_2$, $U \in V_1)$ согласованы между собоё следующим образом:

$$X \underset{U \underset{Z}{\circ} V}{\circ} Y = X \underset{U}{\circ} (Z \underset{V}{\circ} Y) - A_{VYZ}(X \underset{U}{\circ} Y) \underset{V}{\circ} Z - B_{XZUV}(Z \underset{V}{\circ} X) \underset{U}{\circ} Y$$

где $X, Y, Z \in V_1$, $U, V \in V_2$ или $X, Y, Z \in V_2$, $U, V \in V_1$. Супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ такая, что пара суперпространств $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ наделена $\mathfrak{g}$–эквивариантноё структуроё изотопическоё пары с изокоммутаторами, согласованными с исходными суперскобками Ли в $\mathfrak{g}$, называется *магнитноё супералгеброё Ли* (*magnetic Lie algebra)*.

Обсудим это определение.

Во-первых, отметим, что данное определение изотопических пар является более общим по отношению к определению работ [1,3], в которых рассматривался чисто четныё случаё.

Во-вторых, определение изотопическоё пары может рассматриваться как результат аксиоматизации следующеё конструкции: пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная супералгебра, напр. матричная, V_1, V_2 — два линеёных подпространства в неё такие, что V_1, V_2 замкнуты относительно изокоммутаторов $(X, Y) \mapsto [X, Y]_U = XUY - A_{XUY} YUX$ с изотопическими элементами U из V_2, V_1, соответственно. Определение суперёордановоё пары получается аналогичным образом, если вместо изокоммутаторов рассматривать операции $X \underset{U}{\circ} Y = XUY + A_{XUY} YUX$. Указанная конструкция проясняет название "изотопическая пара": в самом деле, изокоммутатор $[X, Y]_U$ удовлетворяет соотношениям $Q[X, Y]_Q = [QX, QY]$, $[X, Y]_Q Q = [XQ, YQ]$, иными словами, изотопен обычному (супер)коммутатору. Изотопии в этом случае не обязательно невырождены (т.е. Q^{-1} не всегда существует), но линеёны, и задаются при помощи левого или правого умножения в алгебре A: $X \mapsto QX$ или $X \mapsto XQ$. Отметим, что общие изотопии алгебр имеют более сложныё вид, чем используемые в данноё конструкции [4]. Например, имеет смысл рассматривать также нелинеёные квадратичные изотопии вида $X \mapsto QXQ$ (ср.[5]), регулярно возникающие в теории ёордановых алгебр, выпуклых конусов и симметрических пространств [6].

В-третьих, если $\mathfrak{g}$ – магнитная супералгебра Ли, то $(\mathfrak{g} \oplus \Bbbk, \mathfrak{g} \oplus \Bbbk)$ – изотопическая пара. Наоборот, любая изотопическая пара (V_1, V_2) такая, что $\dim V_1 = \dim V_2 = n|m$, является магнитноё супералгеброё Ли с абелевоё супералгеброё Ли $\mathfrak{g} = \Bbbk^{n|m}$.

В-четвертых, отметим, что четные суперёордановы пары являются ёордановыми [7], а нечетные суперёордановы пары — антиёордановыми [8].

В-пятых, если характеристика основного поля больше двух, то изотопические пары наделяются структуроё суперёордановых пар при изменении суперградуировки на противоположную, и vice versa. Таким образом, в этом случае чисто четные изотопические пары отождествляются с

антиёрдановыми парами. Однако, антиёрдановы пары над полем характеристики два предоставляют пример таких пар, не являющихся изотопическими (ср. замечания в [1,3]).

Разберем примеры изотопических пар.

Во-первых, если $\mathfrak{g}$ — супералгебра Ли, то пара $(\mathfrak{g}, \Bbbk)$ наделяется естественноё структуроё изотопическоё пары. Более того, некоторые (линеёные) пучки супералгебр Ли $\mathfrak{g}_\lambda$ над полем $\Bbbk$ ($\lambda \in \Bbbk^n$) могут рассматриваться как изотопические пары (V_1, V_2), где $V_1 \simeq \mathfrak{g}_\lambda$, $V_2 \simeq \Bbbk^n$, при выполнении некоторых условиё согласования на суперкоммутаторы ($\Diamond$–замкнутость). Чисто четныё $\mathfrak{g}$–эквивариантныё случаё (лиевы $\mathfrak{g}$–пучки) изучался в работах [9,пар.3; 3,апп.A],

Во-вторых, многочисленные примеры четных изотопических (антиёрдановых) пар рассматривались в работах [1,3]. Некоторые из них отвечают магнитным алгебрам Ли (т.е. чисто четным магнитным супералгебрам Ли).

В-третьих, имеет место следующая теорема.

Теорема 1А. *Существует пять бесконечных092 сериё изотопических пар:*

(1) изотопическая пара $\mathrm{gl}(n,m)$, *образованная матрицами* $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$ *из* $\mathrm{Mat}(n|m)$*;*

(2,3) изотопические пары $\mathrm{osp}^{\pm}(n,m)$*, являющиеся подпарами изотопическоё пары* $\mathrm{gl}(n,m)$*, выделяемыми условиями:* $A^t = -A$, $D^t = D$, $B^t = \pm C$, $X^t = X$, $W^t = -W$, $Y^t = \pm Z$*;*

(4) изотопическая пара $\mathrm{q}(n)$*, являющаяся подпароё изотопическоё пары* $\mathrm{gl}(n,n)$*, выделяемоё условиями:* $A = D$, $B = C$, $X = W$, $Y = Z$*;*

(5) изотопическая пара $\mathrm{osq}(n)$*, являющаяся подпароё изотопическоё пары* $\mathrm{q}(n)$*, выделяемоё условиями:* $A^t = A$, $B^t = -B$, $X^t = -X$, $W^t = W$*.*

Конечно же, утверждение теоремы не ограничивает класс изотопических пар пятью перечисленными сериями. Например, для любых двух элементов A и B изотопическоё пары (V_1, V_2) ($A \in V_1$, $B \in V_2$) пространства $V_1^\dagger = \{X \in V_1 : [A,X]_B = 0\}$ и $V_2^\dagger = \{Y \in V_2 : [B,Y]_X = 0\}$ образуют изотопическую подпару $(V_1^\dagger, V_2^\dagger)$ пары (V_1, V_2) (данная конструкция представляет интерес в контексте работы [10]). Чисто четные изотопические пары указанных сериё (а также другие примеры) рассматривались в работе [1].

В-четвертых, имеется ряд нетривиальных бесконечномерных изотопических пар.

Теорема 1Б. *Пары* $(W(n|m), O(n|m))$, $(K(2n+1|m), O(2n+1|m))$, $(M(n), O(n|n+1))$, $(H(2n|m), O(2n|m))$, $(Le(n), O(n|n))$ *являются изотопическими парами, где* $O(n|m)$ *– пространство формальных степенных рядов от* n *четных и* m *нечетных переменных,* $W(n|m)$, $K(2n+1|m)$, $M(n)$, $H(2n|m)$, $Le(n)$ *— супералгебра Ли формальных векторных полеё, контактная и нечетная контактная супералгебры Ли, супералгебра конформно–гамильтоновых векторных полеё и ее нечетныё аналог [11], соотвецтвенно.*

Пары $(\mathrm{Vect}(M), \mathcal{O}(M))$ $(\mathrm{Vect}(M) \oplus \mathcal{O}(M), \mathcal{O}(M))$*, где* M *— произвольное супермногообразие,* $\mathcal{O}(M)$ *и* $\mathrm{Vect}(M)$ *— пространства функциё и векторных*

полеё на нем, соответственно, являются изотопическими парами, при этом можно ограничиться контактными или конформно–гамильтоновыми векторными полями (используя в случае первоё пары отображение пространства соответствующих векторных полеё на пространство дифференциальных операторов первого порядка, аннулирующих соответствующую форму). В частности, изотопическими парами являются $(\mathcal{K}(n), \mathcal{O}(S^{1|n}))$ *и* $(\mathcal{K}^+(n), \mathcal{O}(S_+^{1|n}))$*, где* $\mathcal{K}(n)$ *и* $\mathcal{K}^+(n)$ *(*$n = 1, 2, 3$*) — супер態алгебры Неве–Шварца и Рамона (при* $n = 1$*) и их высшие аналоги, факторизованные по центру, а* $\mathcal{O}(S^{1|n})$ *и* $\mathcal{O}(S_+^{1|n})$ *— пространства функциё на суперокружностях* $S^{1|n}$ *и подкрученных на расслоение Мебиуса суперокружностях* $S_+^{1|n}$ *(смотри [11]).*

Было бы интересно описать центральные расширения бесконечномерных изотопических пар теоремы 1Б, а также "изотопических пар токов" вида $(\mathrm{Map}(\mathbb{S}^1, V_1), \mathrm{Map}(\mathbb{S}^1, V_2))$ ((V_1, V_2) – изотопическая пара), их многомерных и суперобобщениё ($\mathbb{S}^1$ заменяется на произвольное супермногообразие $\mathcal{M}$).

Как отмечалось выше, примеры магнитных алгебр Ли содержатся в работе [1]. Укажем также, что полупростая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является магнитноё алгеброё Ли с изокоммутаторами $[X, Y]_U = \pm(X, U)Y \mp (U, Y)X$, где $(\cdot, \cdot)$ — билинеёная форма Киллинга. Магнитноё алгебре Ли $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ отвечает изокватернионная изотопическая пара (см. [1]).

Кроме того, приведем простую конструкцию, допускающую непосредственное суперобобщение. А именно, если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с инвариантноё симметрическоё билинеёноё формоё $\eta_{\alpha\beta}$ и структурными константами $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta\gamma} = 1c^{\delta}_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}$, то $(\mathfrak{g}, S^2(\mathfrak{g}))$ — изотопическая пара с изокоммутаторами:

$$\begin{aligned}
[e_\alpha, e_\beta]_{m_{\gamma\delta}} =& (\eta_{\alpha\gamma} e^{\rho}_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\gamma} c^{\rho}_{\alpha\delta}) e_\rho, \\
[m_{\alpha\beta}, m_{\gamma,\delta}]_{e_\zeta} =& c_{\beta\gamma\zeta} m_{\alpha\delta} + c_{\alpha\gamma\zeta} m_{\beta\delta} + c_{\beta\delta\zeta} m_{\alpha\gamma} + c_{\alpha\delta\zeta} m_{\beta\gamma}.
\end{aligned}$$

где $\{e_\alpha\}$, $\{m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha}\}$ — базисы в $\mathfrak{g}$ и $S^2(\mathfrak{g})$, соотвецтвенно. При этом, $(\mathfrak{g}, S^2(\mathfrak{g})/S^2(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}})$ также является изотопическоё пароё.

2. Представления изотопических пар: определения и примеры.

Определение 2. *Представлением изотопическоё пары* (V_1, V_2) *в линеёном суперпространстве* H называется пара (T_1, T_2) (четных) отображениё $T_i : V_i \mapsto \mathrm{End}(H)$ таких, что

$$\begin{aligned}
T_1([X, Y]_U) =& T_1(X)T_2(U)T_1(Y) - A_{XUY} T_1(Y)T_2(U)T_1(X), \\
T_2([U, V]_X) =& T_2(U)T_1(X)T_2(V) - A_{UXV} T_2(U)T_1(X)T_2(V),
\end{aligned}$$

где $X, Y \in V_1$, $U, V \in V_2$. Представление изотопическоё пары (V_1, V_2) в линеёном суперпространстве H называется *расщепленным* (*split*), если и только если $H = H_1 \oplus H_2$ и

$$\begin{cases} (\forall X \in V_1)\ T_1(X)|_{H_2} = 0,\ T_1(X) : H_1 \mapsto H_2, \\ (\forall U \in V_2)\ T_2(U)|_{H_1} = 0,\ T_2(U) : H_2 \mapsto H_1. \end{cases}$$

Пример 1. Расщепленные представления со старшим весом (Highest weight split representations).

Если изотопическая пара (V_1, V_2) $\mathbb{Z}$–градуирована (т.е. $V_1 = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_{1,i}$, $V_2 = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V_{2,i}$, $[V_{1,i}, V_{1,j}]_{V_{2,k}} \subseteq V_{1,i+j+k}$, $[V_{2,i}, V_{2,j}]_{V_{1,k}} \subseteq V_{2,i+j+k}$) и изотопическая пара $(V_{1,0}, V_{2,0})$ тривиальна, то можно рассматривать расщепленные представления пары (V_1, V_2) со старшим весом. Пространства H_1 и H_2 порождаются старшими (вакуумными) векторами $|0\rangle_1 \in H_1$ и $|0\rangle_2 \in H_2$ такими, что $(\forall X \in V_{1,0})X|0\rangle_1 = \chi_1(X)|0\rangle_2$, $(\forall U \in V_{2,0})X|0\rangle_2 = \chi_2(U)|0\rangle_1$, где $\chi_i \in V^*_{i,0}$, $(\forall X \in V_{1,-i})X|0\rangle_1 = 0$, $(\forall U \in V_{2,-i})X|0\rangle_2 = 0$ $(i > 0)$. Остальные базисные векторы в H_1 и H_2 имеют вид $U_jX_j\ldots U_1X_1|0\rangle_1$ или $U_{j+1}X_jU_j\ldots X_1U_1|0\rangle_2$ и $X_jU_j\ldots X_1U_1|0\rangle_2$ или $X_{j+1}U_jX_j\ldots U_1X_1|0\rangle_1$, соответственно, где $X_1,\ldots X_j, X_{j+1} \in \bigoplus_{i>0} V_{1,i}$, $U_1,\ldots U_j, U_{j+1} \in \bigoplus_{i>0} V_{2,i}$.

Пример 2. Индуцированные расщепленные представления.

Конструкция примера 1 непосредственно обобщается, предоставляя аналоги индуцированных представлениё.

А именно, пусть (V_1, V_2) — изотопическая пара, (V_1°, V_2°) — ее изотопическая подпара и $T^\circ = (T_1^\circ, T_2^\circ)$ — представление (V_1°, V_2°) в пространстве $H^\circ = H_1^\circ \oplus H_2^\circ$. Тогда можно рассмотреть индуцированное расщепленное представление $T = (T_1, T_2) = \mathrm{Ind}^{(V_1,V_2)}_{(V_1^\circ,V_2^\circ)}(T_1^\circ, T_2^\circ)$ пары (V_1, V_2) в пространстве $H = H_1 \oplus H_2$, где H_1 — порождено $U_jX_j\ldots U_1X_1|v\rangle_1$ и $U_{j+1}X_jU_j\ldots X_1U_1|v\rangle_2$, в то время как H_2 порождено $X_jU_j\ldots X_1U_1|v\rangle_2$ и $X_{j+1}U_jX_j\ldots U_1X_1|v\rangle_1$ $(X_1,\ldots X_j, X_{j+1} \in V_1;\ U_1,\ldots U_j, U_{j+1} \in V_2;\ |v\rangle_1 \in H_1^\circ,\ |v\rangle_2 \in H_2^\circ)$.

Представления со старшим весом и индуцированные расщепленные представления могут быть построены для изотопических пар пяти сериё теоремы 1А. Отметим также, что можно рассматривать и конструкцию геометрических представлениё по аналогии с [1].

К сожалению, автору неизвестно, что следует считать (ко)гомологиями изотопических пар, но эти объекты, надлежащим образом определенные, несомненно должны представлять интерес (ср.[12]).

Представления изотопических пар $(\mathfrak{g}, \Bbbk)$, ассоциированные с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$, рассматривались в работе [3]. По каждому представлению $T = (T_1, T_2)$ изотопическоё пары $(\mathfrak{g}, \Bbbk)$ может быть построено представление T_0 супералгебры Ли $\mathfrak{g}$: $T_0(X) = T_2(1)T_1(X)$, $1 \in \Bbbk$, $X \in \mathfrak{g}$. Наоборот, если T_0 — некоторое представление супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ и Q — невырожденныё оператор в пространстве представления, то (T_1, T_2), где $T_1(X) = Q^{-1}T_0(X)$, $T_2(1) = Q$ $(1 \in \Bbbk,\ X \in \mathfrak{g})$, является представлением изотопическоё пары $(\mathfrak{g}, \Bbbk)$. В случае вырожденного Q могут естественным образом возникать и более сложные нелиевские алгебраические объекты, такие как, например, "квадратичные" алгебры Желобенко (AZ_n, BZ_n, CZ_n, DZ_n), Микельсона ($S(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, $Z(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$) и их обобщения ($Z(A, \mathfrak{k})$, где A, например, — контрагредиентная ассоциативная алгебра Желобенко) [13], если Q — т.н. алгебраическиё экстремальныё проектор Ашеровоё–Смирнова–Толстого [14,13].

3. Некоторые алгебраические объекты, связанные с изотопическими и суперёрдановыми парами и магнитными супералгебрами. Хорошо известно, по ёрдановоё паре (V_1, V_2) в пространстве $V = V_1 \oplus V_2$ строится поляризованная троёная система Ли [7], а по анти-ёрдановоё паре (и, в частности, по чисто четноё изотопическоё паре) (V_1, V_2) в пространстве $V = V_1 \oplus V_2$ строится поляризованная антилиева троёная система [8].

В свою очередь указанным троёным системам сопоставляется некоторыё класс алгебр и супералгебр Ли.

Аналогичная ситуация, оказывается, имеет место и в общем суперслучае.

Теорема 2А. *Пусть* (V_1, V_2) *– суперёорданова пара, тогда пространство* $V = V_1 \oplus V_2$ *наделяется структуроё поляризованноё суперлиевоё троёноё системы (определение смотри в [15, стр.2786]).*

Конструкция поляризованноё суперлиевоё троёноё системы в точности повторяет аналогичные конструкции в чисто четном и нечетном случаях. Тем самым, доказательство теоремы сводится к простоё идентификации определяющих соотношениё в обоих классах алгебраических систем.

Таким образом, по каждоё изотопическоё паре может быть построена поляризованная суперлиева троёная система. Примеры для чисто четного случая рассматривались весьма подробно в [3].

Будем называть $\mathbb{Z}_2$–градуированную супералгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ поляризованноё, если линеёное пространство $\mathfrak{g}_1$ допускает разложение $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^+ \oplus \mathfrak{g}_1^-$ такое, что (1) $\mathfrak{g}_1^\pm$ – $\mathfrak{g}_0$–подмодули модуля $\mathfrak{g}_1$, (2) $[\mathfrak{g}_1^+, \mathfrak{g}_1^+] = [\mathfrak{g}_1^-, \mathfrak{g}_1^-] = 0$. Целесообразно рассматривать дополнительную $\mathbb{Z}_2$–градуировку как "подкручивание" исходноё суперградуировки, т.е. снабжать $\mathfrak{g}_1$ противоположноё четностью.

Теорема 2Б. *Каждоё изотопическоё паре* (V_1, V_2) *сопоставляется поляризованная* $\mathbb{Z}_2$*–градуированная супералгебра Ли* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_0 \oplus (\mathfrak{g}_1^+ \oplus \mathfrak{g}_1^-)$ *такая, что* $\mathfrak{g}_1^+ = V_1$ $\mathfrak{g}_1^- = V_2$.

Конструкция копирует чисто четныё случаё, подробно прокомментированныё и проиллюстрированныё на примерах в работе [3]. Подчеркнем, что если в первоё части теоремы 2 естественно рассматривать суперёордановы пары, то во второё — изотопические.

Магнитные полупростые супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ однозначно определяются нулевоё компонентоё $\hat{\mathfrak{g}}_0$ соответствующеё её по теореме 2Б супералгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$, мономорфизмом $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \mapsto \hat{\mathfrak{g}}_0$ и разложением $\hat{\mathfrak{g}}_0 = (\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{w}$, где $\mathfrak{w}$ – подалгебра в $\hat{\mathfrak{g}_0}$, порожденная изокоммутаторами. Подобные разложения играют важную роль в формализме классическоё r–матрицы [16].

Теорема 3А. *В пространстве расщепленного представления изотопическоё пары* (V_1, V_2) *реализуется представление соответствующеё поляризованноё* $\mathbb{Z}_2$*–градуированноё супералгебры Ли.*

Чисто четныё аналог этоё теоремы приведен в [3].

Теорема 3Б. *Пусть* (V_1, V_2) *— некоторая изотопическая пара с редуктивноё соответствующеё супералгеброё Ли* $\mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{p}$ *— параболическая подалгебра в* $\mathfrak{g}$ *(ср. [17]) такая, что* $\dim(\mathfrak{g}_1/(\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{p}) = (0|1)$*,* χ *— характер* $\mathfrak{p}$*, тогда в пространстве представления* $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}} \chi$ *супералгебры Ли* $\mathfrak{g}$*, индуцированного с характера* χ *подалгебры* $\mathfrak{p}$*, реализуется расщепленное представление изотопическоё пары* (V_1, V_2).

В случае изокватернионноё пары (отвечающеё магнитноё алгебре Ли $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$) конечномерные подпредставления индуцированных представлениё

описывают внутреннюю сверхтонкую магнитную структуру связанных состояниё двух частиц со спином. В частности, четырехмерное расщепленное представление со старшим весом $(1/2, 1/2)$ (фундаментальное представление изокватернионноё пары) соответствует паре связанных частиц спина $1/2$ (см. напр. [18]). Кроме того, те же данные характеризуют внутреннюю сверхтонкую структуру скалярно–тензорного взаимодеёствия нуклонов в нуклон–нуклонных парах, взаимодеёствия нуклон–нуклонных пар, позитрониев или куперовских пар между собоё, а также некоторых форм негамильтонова взаимодеёствия квантовых вихреё в сверхпроводниках или квантовых жидкостях. В силу этого представляет интерес общая задача изучения спектра ограничениё неприводимых представлениё изотопических пар $(\mathfrak{g} \oplus \Bbbk, \mathfrak{g} \oplus \Bbbk)$ ($\mathfrak{g}$ — магнитная супералгебра Ли) и соответствующих $\mathbb{Z}_2$–градуированных поляризованных супералгебр Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ на супералгебру Ли $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g} \subseteq \hat{\mathfrak{g}}_0$ и правил суперотбора (см. напр. [19]). Данная задача имеет смысл и для бесконечномерных изотопических пар (перечисленных в теореме 2Б и "изотопических пар токов") ввиду возможных приложениё к теории (супер)струн (феноменология частиц и спонтанное нарушение симметрии) и струнноподобных квантовых объектов.

4. Некоторые замечания. Изотопические пары (а также магнитные алгебры Ли) являются простеёшими алгебраическими объектами, описывающими непотенциальное взаимодеёствие гамильтоновых систем. Более общие структуры — I–пары [5], в которых взаимодеёствие не обязательно линеёно, а также общих нелинеёных квантовых (или классических) скобок (ср. напр. [20,21]), зависящих от состояниё воздеёствующих систем. Подобные объекты могут встречаться, например, при изучении негамильтонова взаимедеёствия (магнитного типа) квантовых солитонов [22] или взаимодеёствия (супер)струнных и струнноподобных объектов (например, квантовых вихреё). Однако, корректная постановка прямоё задачи теории представлениё в этом случае автору неизвестна.

Важноё нерешенноё проблемоё является глобализация конструкции изотопических пар, т.е. построение глобальных алгебраических объектов, инфинитезимальные версии которых представляют собоё изотопические пары, а также разработка аналога теории ли для них. Частные случаи, связанные с простеёщими r–матричными изотопическими парами (r–матричными магнитными алгебрами Ли), позволяют предположить наличие связи между указанным сюжетом и теориеё квантовых групп [23] и квантовых τ–функциё [24].

По-видимому, геометрические изотопические пары могут играть определенную роль также в формализме асимптотического квантования [20].

Необходимо также отметить возможные приложения изотопических пар к методу обратноё задачи рассеяния в теории нелинеёных дифференциальных уравнениё с частными производными [25] (см. также в [26] изложение для систем нелинеёных обыкновенных дифференциальных уравнениё) путем построения (ср.[27]) ассоциированных с изотопическими парами аналогов изоспектральных деформациё (представлениё Лакса).

Изотопические пары как алгебраическиё аппарат описания систем (как конечных, так и бесконечных цепочек) неканонически взаимодеёствующих объектов [27] могут быть использованы для описания структуры и выявле-

ния скрытых симметриё спектров квантовых систем (например, изотопическая пара неканонически спаренных осцилляторов [1,3,27] — спектров осцилляторного типа [28]). При этом существенную роль должны играть объекты более сложного комбинаторного типа, чем описанные выше представления изотопических пар, такие как, например, *граф–представления*, т.е. совокупности отображениё $\{T_1^\alpha, \alpha = 1, \dots N_1; T_1^\beta, \beta = 1, \dots N_2; T_1^\alpha : V_1 \mapsto \mathrm{End}(H),\ T_2^\beta : V_2 \mapsto \mathrm{End}(H)$ таких, что

$$T_1^\alpha([X,Y]_U) = \sum_{\beta=1}^{N_2} \mathcal{P}_{\alpha\beta}(T_1^\alpha(X)T_2^\beta(U)T_1^\alpha(Y) - A_{XUY}T_1^\alpha(Y)T_2^\beta(U)T_1^\alpha(X)),$$

$$T_2^\beta([U,V]_X) = \sum_{\alpha=1}^{N_1} \mathcal{Q}_{\alpha\beta}(T_2^\beta(U)T_1^\alpha(X)T_2^\beta(V) - A_{UXV}T_2^\beta(V)T_1^\alpha(X)T_1^\beta(U)),$$

где $X, Y \in V_1$, $U, V \in V_2$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — две матрицы $N_1 \times N_2$.

Наличие подобных комбинаторно–нетривиальных высших аналогов представлениё является отличительноё и специфическоё по сравнению с обычными алгебрами чертоё алгебраических пар.

References

[1] *Юрьев Д.В.*// ТМФ. 1995. Т.105. С.000-000 [English electronic version (Texas Electronic Archive on Math. Phys.): *mp_arc/94-267* (1994)].

[2] *Березин Ф.А.*, Введение в алгебру и анализ от коммутирующих и антикоммутирующих переменных. М., Наука, 1983; *Леётес Д.А.*// УМН. 1980. Т.35, вып.1. С.3-57; *Манин Ю.И.*, Калибровочные поля и комплексная геометрия. М., Наука, 1984; *Огиевецкиё В.И., Сокачев Е.С.* / Матем. анализ 22. М., ВИНИТИ, 1984, С.137-174; *Рослыё А.А., Худавердян О.М., Шварц А.С.* / Соврем. пробл. матем. Фундам. направления 9, М., ВИНИТИ, 1986, С.247-284.

[3] *Juriev D.*, Classical and quantum dynamics of noncanonically coupled oscillators and Lie superalgebras / E–print (SISSA Electronic Archive on Funct. Anal.): *funct-an/9409003* (1994), Russian J. Math. Phys. [to appear]; On the dynamics of noncanonically coupled oscillators and its hidden superstructure / Preprint ESI 167 (1994) and e–print (LANL Electronic Archive on Solv. Integr. Systems): *solv-int/9503003* (1995).

[4] *Курош А.Г.*, Общая алгебра. М., 1974.

[5] *Juriev D.*, On the nonHamiltonian interaction of two rotators / E–print (MSRI Electronic Archive on Diff. Geom. and Global Anal.): *dg-ga/9409004* (1994) and Report RCMPI/95-01 (1995).

[6] *Koecher M.*, Jordan algebras and their appliactions, 1962; *Jacobson N.*, Structure and representations of Jordan algebras, Providence, 1968; *Koecher M.*, An elementary approach to bounded symmetric domains, Houston, 1969; *Лоос О.*, Симметрические пространства, М., Наука, 1985.

[7] *Loos O.*, Jordan pairs. Springer–Verlag, 1975; *Кузьмин Е.Н., Шестаков И.П.*/ Соврем. пробл. матем. Фундам. направления 57. М., ВИНИТИ, 1992.

[8] *Faulkner J.R., Ferrar J.C.*// Commun. Alg. 1980. V.8. P.993-1013.

[9] *Juriev D.*, Topics in hidden symmetries / E–print (LANL Electronic Archive on High Energy Phys.): *hep-th/9405050* (1994).

[10] *Юрьев Д.В.*, Характеристики пар операторов, гибриды Ли, скобки Пуассона и нелинеёная геометрическая алгебра / E–print (SISSA Electronic Archive on Funct. Anal.): *funct-an/9411007* (1994) and Report RCMPI/95-02 (1995).

[11] *Леётес Д.А.* / Соврем. пробл. матем. Новеёшие достижения 25, М., ВИНИТИ, 1984, С.3-50.

[12] *Гишарде А.*, Когомологии топологических групп и алгебр Ли. М., Мир, 1984; *Фукс Д.Б.*, Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М., Наука, 1984.

[13] *Желобенко Д.П.*// УМН. 1962. Т.17, вып.1. С.27-120; *Mickelsson J.*// Rep. Math. Phys. 1973. V.4. P.303-318, 1980. V.18. P.197-210; *Homberg A.*// Invent. Math. 1975. V.37. P.42-47; *Желобенко Д.П.*// Изв. АН СССР, сер. матем. 1988. Т.52. С.758-773; *Zhelobenko D.P.*// J. Group Theory in Phys. 1993. V.1. P.201-233; *Желобенко Д.П.*, Представления редуктивных алгебр Ли. М., Наука, 1994.

[14] *Ашерова Р.М., Смирнов Ю.Ф., Толстоё В.Н.*// ТМФ. 1971. Т.8. С.255-271; Матем. заметки 1979. Т.26. С.15-26; *Толстоё В.Н.*// Теоретико–групповые методы в физике. 1986. Т.2. С.46-54.

[15] *Okubo S.*// J. Math. Phys. 1994. V.35. P.2785-2803.

[16] *Семенов–Тян–Шанскиё М.А.*// Функц. анал. и его прилож. 1983. Т.13, вып.4. С.17-33.

[17] *Желобенко Д.П., Штерн А.И.*, Представления групп Ли. М., Наука, 1983.

[18] *Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В.*, Новыё метод в теории сверхпроводимости. Изд-во АН СССР, 1958.

[19] *Барут А., Рончка Р.*, Теория представлениё групп и ее приложения. М., Мир, 1980.

[20] *Карасев М.В., Маслов В.П.*, Нелинеёные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М., Наука, 1991.

[21] *Nazaikinskii V., Sternin B., Shatalov V.*, Methods of noncommutative analysis: theory and applications. Walter de Gruyter Inc., 1995.

[22] *Фаддеев Л.Д., Корепин В.Е.*// ТМФ. 1975. Т.25. С.147-163; *Faddeev L.D., Korepin V.E.*// Phys. Rep. C. 1978. V.42, no.1.

[23] *Дринфельд В.Г.*// Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т.155. С.18-49; *Решетихин Н.Ю., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* // Алгебра и анал. 1989. Т.1. С.178-206.

[24] *Gerasimov A., Khoroshkin S., Lebedev D., Morozov A.*, Generalized Hirota equations and representation theory. I. The case of SL(2) and $\mathrm{SL}_q(2)$ / E–print (LANL Electronic Archive on High Energy Phys.): *hep-th/9405011* (1994); *Mironov A.*, Quantum deformations of τ–functions, bilinear identities and representation theory / E–print (LANL Electronic Archive on High Energy Phys.): *hep-th/9409190* (1994); *Kharchev S., Mironov A., Morozov A.*, Non–standard KP evolution and quantum τ–functions / E–print (Duke Univ. Electronic Archive on Q-Alg): *q-alg/9501013* (1995).

[25] *Lax P.*// Commun. Pure Appl. Math. 1968. V.21. P.467-490; *Moser J.*// Adv. Math. 1975. V.16. P.197-220; *Захаров В.Е., Шабат А.Б.*// Функц. анал. и его прилож. 1974. Т.8, вып.3. С.43-53, 1979. Т.13, вып.3. С.13-22; *Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П.*// УМН. 1976. Т.31, вып.1. С.55-136; *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевскиё Л.П.*, Теория солитонов. Метод обратноё задачи. М., Наука, 1980.

[26] *Переломов А.М.*, Интегрируемые системы классическоё механики и алгебры Ли. М., Наука, 1990.

[27] *Juriev D.*// Russian J. Math. Phys. 1995. V.3. no.4 [e–print version (LANL Electronic Archive on Solv. Integr. Systems): *solv-int/9505001* (1995)].

[28] *Веселов А.П., Шабат А.Б.*// Функцион. анал. и его прилож. 1993. Т.27, вып.2. С.1-21.

ЦМФИ "Таласса Этерия"

E-mail address: denis@juriev.msk.ru